ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Calle San Martín N.° 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año XXXIII — Marzo de 1933 — N.° 3

HIDRÁULICA

Fco. Javier Domínguez S.

Sobre el remanso producido por los machones de un puente. (1)

ESTE problema, que consiste en determinar la diferencia de altura de agua entre aguas arriba y abajo del estrechamiento que provocan en una corriente los machones de un puente, es una aplicación de la teoría de los ensanchamientos bruscos y paulatinos. Pocas cuestiones prácticas han preocupado más a los hidraulistas, ya sea teóricos o experimentales, que el remanso que produce el paso del agua entre los machones de un puente. Sin pretender clasificar ni abarcarlos a todos, basta citar a Dubuat (1786), Vicat (1836), D'Aubisson (1840), Navier (1843), Weisbach (1855), Rühlmann (188), Wex (1888), Montanari (1891), Lorenz (1910), Nagler (1917) y Rehbock (1919). Todos los textos de Hidráulica tratan el problema; algunos con gran extensión. A la importancia desmedida que se le ha atribuído al estudio del remanso que producen los machones del puente es necesario agregar que la gran mayoría de las fórmulas experimentales, y aún las teóricas presentadas, son o de aplicación muy restringida o groseramente erradas. Weyrauch (2) hace notar, con un ejemplo, la discrepancia enorme entre los resultados de las fórmulas más consideradas. ¿A qué se debe esta doble anomalía? La importancia dada al problema es debida a la aparición del resalto y velocidades peligrosas en el torrente que le precede, en los momentos de creces. Esto sucedía en grandes corrientes bajo los puentes de albañilería de machones muy anchos, que hoy día tienden a desaparecer. La segunda, o sea la poca exactitud de las fórmulas propuestas es debida al desconocimiento de la energía mínima que fácilmente se presenta en las partes más estrechas, cuando la suma de Bernoulli de la corriente en la sección que sigue al puente es pequeña. Como nos enseña la Hidráulica, en los angostamientos, como sobre las barreras se encuentra

(1) Este artículo está sacado del Capítulo VI del Curso de Hidráulica profesado por el autor en la Universidad de Chile y Universidad Católica.

(2) Hydraulisches Rechnen, última edición 1921, págs. 238 y sgts.

comúnmente el escurrimiento crítico, desligando el eje hidráulico; es decir, haciendo inaplicable el teorema de Benoulli generalizado, porque aunque a la suma de Benoulli de una sección se agreguen las pérdidas de carga del trayecto, puede ser que esta energía sea menor que la mínima posible de otra sección más estrecha o cuya cota de fondo sea más alta, existiendo necesariamente en esta otra la energía mínima (1).

Las experiencias hechas en machones de puente han dado formas del eje hidráulico muy diversas, lo que ha desconcertado a los experimentadores; especialmente a los antiguos. En realidad, la diversidad de formas corresponde precisamente a los diversos casos que pueden presentarse, que podemos resumir en tres. 1.° Eje ligado, es decir, profundidad de aguas arriba que depende de aguas abajo. 2.° Eje desligado porque entre los machones se produce escurrimiento crítico con resalto al pie; y 3.° Eje desligado y resalto rechazado, porque la corriente entre los machones tiene energía para producir un torrente, que finalmente vuelve al río de aguas abajo por medio del resalto. El eje hidráulico del primer caso tiene la forma de una depresión entre los machones. El segundo puede tener la forma de una depresión o ser un escalonamiento de un nivel más alto anterior, uno intermedio entre los machones y uno menor posterior que corresponde a la profundidad de aguas abajo. El tercer caso será siempre de eje hidráulico escalonado, siendo el escurrimiento crítico entre los machones seguido de un torrente de poca altura que recupera el nivel de aguas abajo por medio del resalto. En el segundo caso; eje desligado con resalto que cubre la napa, se produce aguas abajo del escurrimiento crítico un torbellino de eje horizontal o cilindro líquido, como lo llama Rehbock, situado encima de la corriente, análogo al que se observa en los resaltos.

En Chile este problema ha sido resuelto racionalmente desde que el profesor Dn. Ramón Salas dió a conocer su teoría del escurrimiento crítico (1914), y hoy día, gracias a las experiencias hechas en ensanchamientos bruscos y paulatinos (2) se puede hacer el cálculo de las pérdidas de carga con acierto. Puede determinarse con precisión suficiente en todos los casos, la diferencia de nivel entre aguas arriba y abajo de los machones de un puente y preverse con seguridad la forma del eje hidráulico.

Rehbock y Böss (1919) en Alemania distinguieron la desligazón posible del eje hidráulico sin hacer, especialmente el primero, hincapié en la existencia del mínimo de energía cuando se produce dicha desligazón, pero observando los tres casos que dejamos anotados. Da Rehbock fórmulas empíricas para el cálculo del remanso en los tres casos y para los límites en que la desligazón del eje y el rechazo del resalto se producen (3). Las expresiones que dan la altura del remanso parecen muy acertadas y sus resultados están en entera concordancia con el procedimiento racional que expondremos. Las fórmulas que dan los límites entre los tres casos de eje hidráulico tienen pequeños defectos, debidos sin duda al hecho de no haber considerado el mínimum de enegía.

(1) Igual apreciación hace M. O. Casler en «Stream flow in general terms». Transaction of the American Society, 1930, pág. 12.

(2) H. Matthaei y S. Lewin. Tesis hecha en 1932 en el laboratorio de la Universidad Católica.

(3) Zur Frage des Brückenstaues - Zentral bl. der Bauverwalt, 1919. N.° 37.

En un angostamiento producido por los machones de un puente (3) se pueden considerar 4 secciones. La final E (fig. 1), que generalmente depende de las condiciones de aguas abajo, pues en ella hay un río. En esta sección ya ha terminado la perturbación introducida por el machón. La D al final del angostamiento, o sea al empezar el ensanche. La B, la sección teóricamente más estrecha por la contracción de la vena líquida que puede provocar el machón y la A, de aguas arriba donde todo el ancho L de la corriente participa del escurrimiento. El remanso que interesa determinar es z, diferencia entre las profundidades h_A y h_E, siempre positivo.

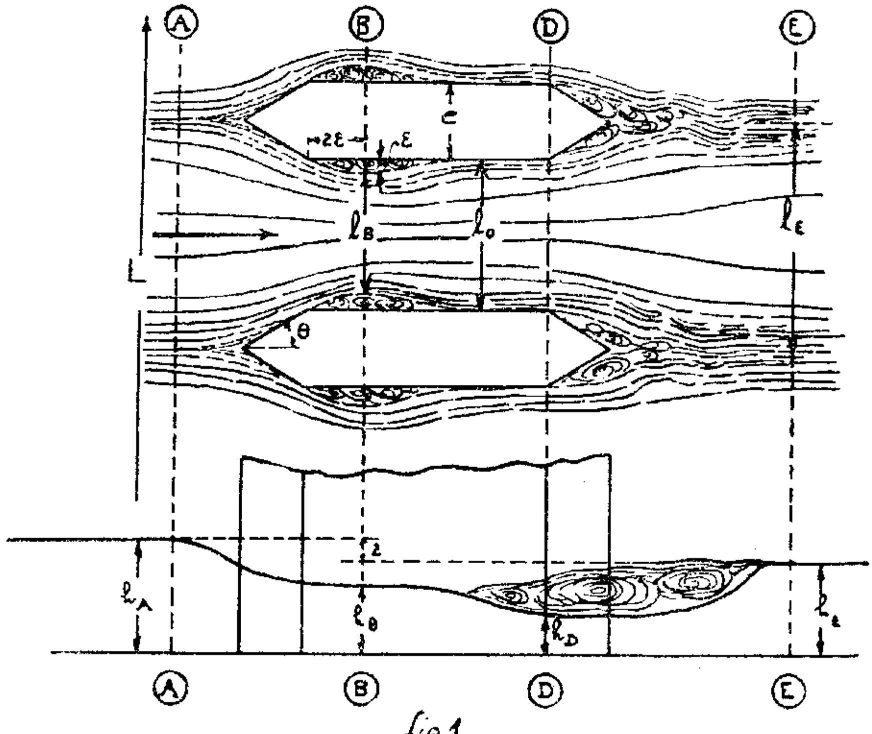

fig. 1

Entre D y E hay una pérdida de carga por ensanche, que depende en parte de la forma geométrica de la punta de aguas abajo del machón. Según las experiencias de Nagler (Universidad de Iowa, EE. UU., 1917), la forma que menos pérdida de carga produce es la de doble curva (fig. 2), poco práctica en una construcción y a la cual se pega la vena. Es equivalente a un ensanche paulatino de ángulo inferior a 30°. En caso de tener esta punta un ángulo 2θ, como en la figura 1 se tendrá un ensanche paulatino correspondiente a ese ángulo; si no hay punta se tratará de un ensanche brusco.

(3) Aquí suponemos lecho de forma invariable, es decir sin socavaciones posibles, que son frecuentes en la realidad. Ese problema es diverso del que aquí tratamos.

Entre D y B habrá un ensanche de reacción debido a la contracción de B y frotamientos, que habrá que considerar si la longitud del machón es grande. La contracción de entrada puede suprimirse prácticamente con una punta de forma

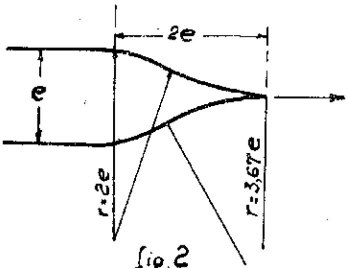

fig. 2

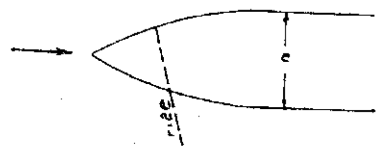

fig. 3

adecuada. La mejor punta de entrada es la ojival, cuyos arcos tienen un radio tres veces el ancho, según Nagler (fig. 3), o solamente dos veces según Rehbock, pues no produce contracción. Muchos experimentadores dan el coeficiente de contracción, o relación entre el ancho útil l_B y el ancho l, entre machones únicamente en función de la forma de la punta de entrada, lo que no puede generalizarse, pues depende en realidad del valor de l. Más racional es lo que hace Rehbock, de dar el ancho $e+2\varepsilon$, es decir el total del estorbo que el machón introduce, en función de su ancho e. Esta relación que Rehbock llama δ tiene los siguientes valores (1).

	$\delta = \dfrac{e+2\varepsilon}{e}$	$\dfrac{\varepsilon}{e}$
Puntas ojivales......................	1.00	0
Puntas semicirculares................	1,20	0,10
Puntas de ángulo 2 θ................	$1+0,35$ sen θ	$0,175$ sen θ
Machón sin punta o de sección rectangular ($2\theta=180°$)................	1,35	0.175

La contracción viene a valer ε por cada lado de un machón, a una distancia que es más o menos 2ε de la arista de entrada; de modo que a esa distancia de la entrada de la parte angosta se encuentra la sección que hemos llamado B.

Entre B y A hay un embudo de entrada, cuya pérdida de carga, de frotamiento únicamente, le calcula por medio de los coeficientes dados para los angostamientos paulatinos (2).

Para el cálculo del remanso se considera la parte de la corriente comprendida entre los ejes de dos machones contiguos, tomando el gasto correspondiente a la

(1) Forchheimer Grundriss der Hydraulick. 1921, pág. 66. No consideramos aquí la división en superficies lisas o rugosas, pues los frotamientos los calcularemos aparte.

(2) Hidráulica General.—Francisco J. Domínguez, polígrafo. Capítulo VI.

parte $\frac{l_E}{L}$ que es la relación entre el ancho entre dos ejes de machones contiguos y el ancho total de la corriente aguas arriba o abajo de los machones. El remanso z, queda dado por la aplicación del teorema de Bernoulli desde E a A, si agregamos a la suma de Bernoulli de E las pérdidas de carga $\Sigma \Lambda$ del camino

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_E + \frac{U_E^2}{2g} + \Sigma \Lambda ; z = h_A - h_E = \frac{U_E^2 - U_A^2}{2g} + \Sigma \Lambda$$

Según lo dicho, las pérdidas de carga son:

$$\Lambda_{ED} = \xi \frac{(U_D - U_E)^2}{2g} \quad ; \Lambda_{DB} = \frac{(U_B - U_E)^2}{2g} + J_{BD} \quad ; \Lambda_{BA} = \lambda_{BA} \frac{U_B^2}{2g}$$

estas fórmulas son válidas en caso de eje ligado; en caso de producirse el escurrimiento crítico en B, se tendrá en A una suma de Bernoulli igual a la crítica de B más la pérdida en el embudo $\lambda_{AB} \frac{U_B^2}{2g} = \lambda_{AB} \frac{h_{cB}}{2}$:

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = \frac{3}{2} h_{cB} + \lambda_{AB} \frac{h_{cB}}{2} = \frac{3 + \lambda_{AB}}{2} h_{cB}$$

y el remanso z sería:

$$z = \frac{3 + \lambda_{AB}}{2} h_{cB} - \frac{U_A^2}{2g} - h_E$$

En estas expresiones y en lo que sigue se indican las profundidades ctíticas con el subíndice c y las letras de la sección respectiva.

Para conocer si el eje es ligado o no basta agregar a la suma de Bernoulli de E las pérdidas entre B y E y compararla con $\frac{3}{2} h_{cB}$. Si $\frac{3}{2} h_{cB}$ es mayor que esa suma, es desligado y en B hay escurrimiento crítico. Para averiguar si el resalto es rechazado, cuando hay en B crisis, basta trazar por puntos el torrente desde B hacia aguas abajo, calculando a qué altura puede llegar en cada punto en resalto. Si las alturas donde puede llegar son mayores que la del río de aguas abajo, será rechazado el resalto.

El cálculo es sencillo usando una tabla de $\frac{B}{h_c}$ en que B es la suma de Bernoulli sobre el fondo y L_c la profundidad crítica, y procediendo respecto a las pérdidas de carga, como se ha indicado anteriormente.

En un ejemplo que va a continuacion se muestran todos los casos posibles de ejes hidráulicos debidos a la presencia de los machones de un puente, y de paso damos las fórmulas empíricas de Rehbock, cuya coincidencia con estos cálculos queda de manifiesto, notando las pequeñas deficiencias teóricas en los límites de desligazón del eje y de resalto rechazado.

Ejemplo.—Un canal de 10 m. de ancho de sección rectangular, tiene un machón central y dos mitades laterales de las dimensiones y forma que indica la figura 4. Se pide determinar el remanso que se produce por estos machones cuando escurre un gasto de 20 m³:s en los tres casos siguientes: *a*) La profundidad aguas abajo de los machones es de 2,5 m.—*b*) Esa profundidad es de 1.25 m.—*c*) La profundidad de aguas abajo es de 1,00 m. Entre *A* y *E* el lecho no tiene pendiente.

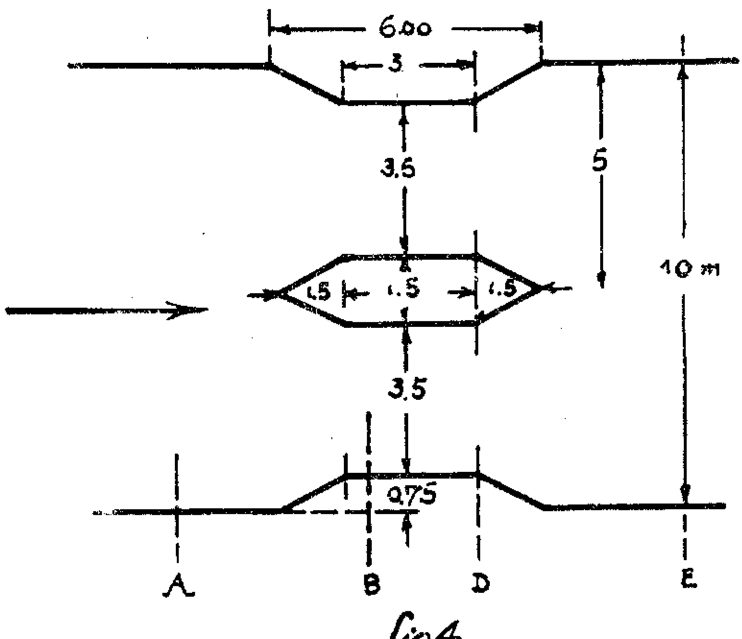

fig 4

En la figura 4 se han señalado las secciones interesantes para el cálculo del remanso. El ángulo del embudo de entrada, igual en nuestro ejemplo al de salida es de $2\,\theta = 53^\circ 20'$ y por lo tanto $\lambda_{AB} = 0,07$ en el embudo de entrada y como $\dfrac{l_E}{l_D} = \dfrac{5}{3,5} = 1,43$ el coeficiente $\zeta = 1,10$, más o menos, en el ensanche paulatino que hay entre D y E (1). La contracción en B vale $\dfrac{\varepsilon}{e} = 0175$ sen $\dfrac{53^\circ 20}{2} = 0,0785$, o sea $\varepsilon = 0,0785 \times 1,5 = 0,118$ m. El ancho útil al escurrimiento en B es, pues,

(1) Véase Curso de Hidráulica, Fco. Javier Domínguez, apuntes poligrafiados 1933. Capítulo VI—pág. 82; o también Ensanche brusco o paulatino de canales, tesis 1932 H. Mattahaei y S. Lewin.

$l_B = 3{,}5 - 2 \times 0{,}118 = 3{,}264$ m. La sección contraída está 0,24 m aguas abajo del comienzo del agostamiento. El δ deRehbock vale 1,157.

Podemos suponer, como se dijo, que el gasto se reparte por iguales partes entre los huecos dejados por los machones. y estudiar el fenómeno por entre dos machones con el gasto correspondiente. En nuestro caso, el gasto entre machones es

$Q = 20 \times \dfrac{l_E}{L} = 20 \times \dfrac{5}{10} = 10\ m^3 : s.$

Las profundidades críticas, sumas de Bernoulli crítico, etc. correspondientes a este gasto en las cuatro secciones son:

Sección	l	q	h_c	U_c	$\dfrac{U^2_c}{2g} = \dfrac{h_c}{2}$	$B_c = \dfrac{3}{2} h_c$
E..........	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112
D..........	3,5	2,86	0,941	3,04	0,471	1,412
B..........	3,264	3,07	0,985	3,11	0,493	1,478
A..........	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112

Caso a). Es dato $h_E = 2{,}50$ y por lo tanto se tiene

$$U_E = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8\ m : s \quad \frac{U_E{}^2}{2g} = 0{,}0325 \quad B_E = 2{,}533\ m$$

La pérdida por ensanche paulatino Λ_{DE}, se calcula por tanteos; aceptando $\Lambda_{DE} = 0{,}007$ se tendría

$$B_D = 2{,}533 + 0{,}007 = 2{,}540, \quad \text{a lo que corresponde:}$$

$$\frac{B_D}{h_c} = \frac{2{,}540}{0{,}941} = 2{,}7; \frac{h_D}{h_C} = 2{,}615;\ h_D = 2{,}46;\quad U_D = 1{,}16;\ \Lambda_{DE} = 1.10 \frac{(1{,}16-0{,}8)^2}{2g}$$

$= 0.070$, quedando comprobado el valor de Λ_{DE}, pues resulta igual al supuesto el tanteo es definitivo.

Entre D y B, el ensanche de reacción, con los siguientes datos: $X_1 = \dfrac{h_D}{h_c} = 2{,}615$; $n = \dfrac{l_D}{l_B} = 1.07$ daría: (1)

$$X_0 = 1.381 + \sqrt{1{,}9-0{,}41} = 2{,}607$$

(1) Fórmula sentada en Curso de Hidráulica citado.

por lo tanto: $h_B = X_0 \times 0{,}941 = 2{,}45$ m. A esto correspondería $\frac{h_B}{h_{CB}} = 2{,}49$ $\frac{B_B}{h_c} =$ 2,585, es decir, $B_B = 2{,}241$, es decir que la pérdida es insignificante.

Hay que agregar la pérdida de frotamientos en el trayecto $BD = 3 - 0{,}24 = 2{,}76$ m, que dada la semejanza de las secciones terminales se puede calcular simplemente multiplicando la pérdida de carga por unidad de longitud correspondiente a la sección D por la distancia DB: $\Lambda_{DB} = J_B \times 2{,}76$. El valor de J_B, obtenido por los procedimientos ordinarios de los canales, suponiendo un coeficiente de rugosidad $n = 0{,}017$ de Kutter es: $J_B = \frac{U^2_D}{C^2 R_D} = 0.0004$. La pérdida de frotamientos es pues $\Lambda_{DB} = 0{,}0011$.

Agregando simplemente a la suma de Bernoulli de D la suma de las pérdidas dadas por estos dos cálculos (dada la pequeñez de ellos), se tendrá $B_B = 2{,}54 + 0{,}002 = 2{,}542$ m y por lo tanto $h_B = 2{,}49 \times 0{,}985 = 2{,}45$; $\frac{U^2_B}{2g} = 0{,}052$. La suma de Bernoulli 2,542 m. es mayor que la crítica que corresponde a la sección B, y por lo tanto el eje es ligado.

La pérdida en el embudo de entrada es $\Lambda_{AB} = 0{,}07 \times 0{,}052 = 0{,}004$, que agregada a B_B nos da B_A. Se tiene finalmente $B_A = 2{,}546$; $\frac{B_A}{h_c} = 3{,}436$; $\frac{h_A}{h_c} = 3{,}391$ $h_A = 2{,}513$ m.

El remanso producido por los machones es entonces $z = 2{,}51 - 2{,}50 = 0{,}013$ m.

Rehbock llama *«estorbo»* a la relación $\alpha = \frac{\Sigma e}{L}$, entre la parte de ancho ocupada por los machones y el ancho total de la corriente, y llama «relación de escurrimiento» a la razón $\omega = \frac{U^2_E}{2gh_E}$

Da para el eje hidráulico ligado la fórmula empírica del remanso.

$$z = \left[\delta - \alpha\ (\delta - 1)\right] \left[0{,}4\alpha + \alpha^2 + 9\alpha^4\right] \left[1 + 2\omega\right] \alpha \frac{U_E^2}{2g}$$

y como expresión simplificada, para los casos ordinarios ($0{,}06 < \alpha < 0{,}16$ y $0{,}03 < \omega < 0{,}12$), con error hasta de 16% la fórmula:

$$z = \alpha \frac{U_E^2}{2g}$$

En nuestro ejemplo tendríamos $\alpha = \frac{3}{10}$ y $\omega = \frac{0{,}0325}{2{,}5} = 0{,}013$

$$z = [1{,}157 - 0{,}3 \times 0{,}157]\ [1{,}2 + 0{,}09 + 0{,}0729]\ [1 + 0{,}026]\ 0{,}3 \times 0{,}0325 = 0{,}015 \text{ m.}$$

Caso b.—$h_E = 1{,}25$; $U_E = 1{,}6$; $\dfrac{U_E^2}{2g} = 0{,}13$; $B_E = 1{,}38$ m

La suma de Bernoulli mínima que puede haber en D es la crítica $B_D = 1{,}412$. Tanteando la pérdida de carga con la diferencia $\Lambda = 1{,}412 - 1{,}38 = 0{,}032$, se tendría, $U_D = 3{,}04$ y $\Lambda_{DE} = 1{,}10 \dfrac{(3{,}04 - 1{,}6)^2}{2g} = 0{,}107$. Como este valor es mayor que el supuesto, en D no hay suma de Bernoulli crítica. El tanteo definitivo corresponde a $\Lambda = 0{,}06$ m, es decir $B_D = 1{,}44$; $\dfrac{B_D}{h_c} = 1{,}534$; $\dfrac{h_D}{h_c} = 1{,}165$; $h_D = 1{,}87$; $U_D = 2{,}63$; que verifica el valor de la pérdida

$$\Lambda_{DE} = 1{,}1 \frac{(2{,}63 - 1{,}6)^2}{2g} = 0{,}00595$$

Entre D y B la pérdida de frotamientos $2{,}64\ J_D = 0{,}0034 \times 2{,}64 = 0{,}009$ y la de ensanche brusco no puede pasar del valor 0,012 que correspondería a la velocidad crítica en B. Se tendría así $B_B = 1{,}44 + 0{,}009 + 0{,}012 = 1{,}461$, que por ser menor que el crítico es imposible, y sencillamente en B hay escurrimiento crítico con $B_B = 1{,}478$. El eje es pues desligado, pero muy cerca del límite de su ligado.

La pérdida de carga del embudo AB es, $0{,}07 \times 0{,}493 = 0{,}034$, y la suma de Bernoulli de A es $B_A = 1{,}478 + 0{,}034 = 1{,}512$, a la que corresponde $h_A = 1{,}41$ m.

El remanso es, pues:

$$z = 1{,}41 - 1{,}25 = 0{,}16 \text{ m.}$$

Rehbock da para el límite superior del eje hidráulico ligado, la expresión

$$\alpha \geq \frac{1}{0{,}97 + 21\,\omega} - 0{,}13$$

como es dato α, despejando ω se obtiene:

$$\omega \geq \frac{0{,}0414}{\alpha} - 0{,}0462$$

introduciendo el valor de α del ejemplo, se tendría que el eje se desliga, o sea, hay escurrimiento crítico si $\omega \geq 0{,}082$. En el ejemplo, caso *b*), tenemos $\omega = \dfrac{0{,}13}{1{,}25} = 0{,}104$ y el eje es desligado, como hemos visto (1).

Sin embargo, la expresión del límite de Rehbock debe ser usada con cautela, pues dice que para $\alpha = 0$, es decir, si no hay machones, el eje se desliga si $\omega = \dfrac{U_e^2}{2\,g\,h_E} =$

(1) El valor $\omega = 0{,}104$ corresponde a $h_E = 1{,}26$ m., que deja ver lo cerca del límite que está la profundidad del caso *b*), $h = 1{,}25$ m. Aplicando el teorema de Bernoulli generalizado h_E límite $= 1{,}29$ m.

$=0{,}378$, o sea, cuando la profundidad de aguas abajo es 1,1 de la crítica en vez de ser igual a ella:

El remanso, según Rehbock, para el caso *b*) de eje desligado y resalto al pie está dado por la expresión

$$z=\left[\delta+\alpha\,(\delta-1)\right] \quad (21{,}5\,\alpha+33\,\omega \quad 6{,}6)\ \alpha\ \frac{U_E{}^2}{2\,g}$$

válida para $0{,}6<\alpha<0{,}3$.

Introduciendo los valores del caso *b*) $\alpha=0{,}3$; $\omega=\dfrac{0{,}13}{1{,}25}=0{,}104$ se obtiene

$$z=1{,}11\ (21{,}5\times0{,}3+33\times0{,}104-6{,}6)\ \ 0{,}3\times0{,}131=0{,}14\text{ m.}$$

Caso c)—h_E 1 m.—Como esta profundidad es menor que la que desliga el eje, se tiene sencillamente, como en el caso *b*), independencia entre aguas arriba y aguas abajo del machón, pues en *B* hay escurrimiento crítico. Según esto, $h_A=1{,}41$ m. Por lo tanto

$$z=1{,}41-1{,}00=0{,}41\text{ m.}$$

El trazado del eje hidráulico del posible torrente de *B* hacia *E* revela que el resalto es rechazado. La distancia *D* en que se verifica la expansión total de la vena obedece a la expresión empírica en que α es el ángulo de ensanche y *n* la razón de anchos (1).

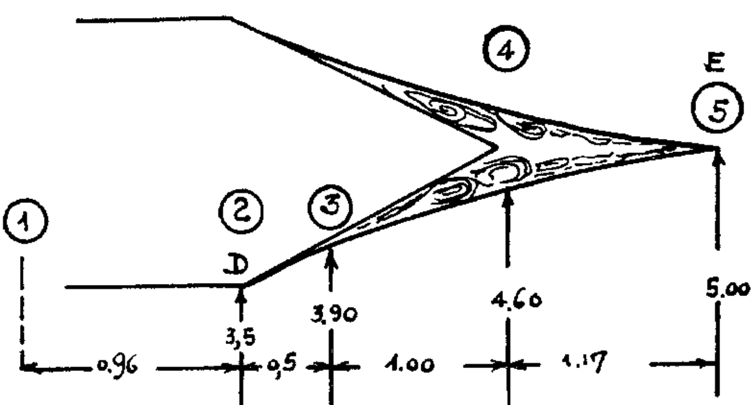

fig. 5

$$D=l_1\left[7{,}25\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\pi-\alpha}{3,\ \mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}}\right]=5\left[7{,}25\left(1-\frac{3{,}50}{5{,}00}\right)-\frac{\pi-0{,}93}{3\times0{,}449}\right]=2{,}67\text{m}$$

(1) Véase Curso de Hidráulica citado.

es decir, que toda la sección participa del escurrimiento, 2,67—1,5 = 1,17 m. más abajo que el machón. Los anchos de las distintas secciones los tomamos de un trazado gráfico como el adjunto (fig. 5).

El eje hidráulico, entre machones, en la parte angosta, desde el punto B hasta el punto D de la figura 5 aparece en el siguiente cuadro:

Punto	l	D distancia	h	$\frac{U^2}{2g}$	B	R	$\frac{1}{C^2R}$	J	J_m	$J_m D$
B	3,264		0,985	0,493	1,478	0,618	0,00025	0,0053		
1	3,50	1,68	0,781	0,685	1,466	0,540	0,00067	0,0090	0,00715	0,012
D	3,50	0,96	0,793	0,665	1,458	0,546	0,00065	0,0085	0,00875	0,0081

El eje hidráulico del torrente posible entre D y E y del río donde puede ir saltando, aparecen en el siguiente cuadro:

Punto	l	D	h	$\frac{U^2}{2g}$	B	R	$\frac{1}{C^2R}$	J	J_m	$J_m D$	h_1
D	3,5		0,793	0,665	1,458	0,546	0,00065	0,0085			1,03
3	3,90	0,5	0,647	0,806	1,453	0,489	0,00074	0,0116	0,0100	0,005	1,15
4	4,60	1,0	0,510	0,927	1,437	0,363	0,00112	0,0204	0,0160	0,016	1,145
5	5,00	1,17	0,463	0,951	1,414	0,389	0,0010	0,0189	0,0196	0,023	1,110
E	10—	9,88	0,530	0,730	1,260	0,479	0,00073	0,0122	0,0156	0,154	1,000

No es este el sitio de comentar el cálculo del cuadro anterior, que corresponde al estudio del movimiento variado, pero, sin embargo, es necesario hacer notar que el eje hidráulico ha sido calculado hasta E por tanteos y una vez demostrado que aun en E es imposible el resalto, (pues el torrente es capaz de saltar más arriba que el río de 1 m), nos hemos dado la altura 0,53 m., que corresponde al río de 1 m. y hemos calculado la distancia de la sección E en que esa altura se produce.

Rehbock da para el remanso, en caso de resalto rechazado, la expresión válida para $\alpha < 0{,}9$:

$$z = (0{,}54 + \alpha + 1{,}9\,\alpha^5)\left(\frac{q}{L}\right)^{2/3} - h_E$$

reemplazando en ella nuestros valores, tendríamos

$$z = (0,54 + 0,3 + 1,9 \times 0,00243) \left(\frac{20}{10} \right)^{2} /_{3} - 1 = 0,41 \text{ m}$$

El rechazo del resalto se produce, según Rehbock, cuando

$$\alpha = 0,05 + (0,9 - 2,5\,\omega)^2$$

o explícita en ω

$$\omega^2 - 0,72\,\omega + 0,136 - 0,16\,\alpha = 0$$

En nuestro caso, con $\alpha = 0,3$

$$\omega^2 - 0,72\,\omega + 0,088 = 0$$

$$\omega = 0,36 \pm \sqrt{0,0416}$$

$$\omega' = 0,562 \qquad \omega'' = 0,16$$

Como ω es la razón $\dfrac{U^2}{2\,gh}$, y si toma el valor 0,5 corresponde al escurrimiento crítico, estas raíces corresponden, la 0,16 a un río, y la 0,56 a un torrente. La raíz mayor de 0,5 es siempre inútil, porque si hay un torrente en E, siempre habrá resalto rechazado.

La raíz $\omega = 0,16$, corresponde a $h_E = 1,083$ m. Con nuestra manera de calcular, ese límite sería 1,03 m. en D; es decir, 1,20 en E.

En resumen, podemos decir que el método racional expuesto coincide muy bien con las expresiones empíricas de Rehbock; los límites, sin embargo, que separan los tres casos de posibles ejes hidráulicos dados por este autor, han de ser comprobados en caso de duda, pudiendo en los demás casos efectuar el cálculo, con suficiente aproximación, por las fórmulas de Rehbock.

Al exponer un ejemplo por medio de este largo cálculo siguiendo el camino racional, no hemos perseguido otro objeto que hacer ver que el problema tiene una perfecta solución por los métodos ordinarios de la Hidráulica, siempre que se considere la posibilidad de producirse la energía mínima, verdadera directriz de la discusión.